
Question ouverte 3 – Examen de janvier 2023

Soit A une matrice de taille $n \times n$ à coefficients réels et soit O la matrice nulle de taille $n \times n$.

Montrer que si A est diagonalisable et $A^2 = O$, alors $A = O$.

Il est bon de décomposer la résolution de ce genre d'exercice à priori complexe en quatre parties. Dans un premier temps (*analyser*), il s'agit de bien appréhender le problème. Quelle est sa thématique? Ensuite (*lister*), on pose les outils mathématiques nécessaires à la résolution du problème, qui sera l'étape suivante (*résoudre*). Finalement, si cela est possible, on vérifie nos résultats (*vérifier*).

Analyser. Il s'agit de déterminer si la matrice A est la matrice nulle.

Lister. Il faut se rappeler la définition de matrice diagonalisable.

Résoudre. Comme par hypothèse la matrice A est diagonalisable, il existe une matrice inversible P de taille $n \times n$ et une matrice diagonale D de taille $n \times n$ telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

Le calcul nous donne

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PDI_nDP^{-1} \implies A^2 = PD^2P^{-1}.$$

Comme P est inversible, nous avons

$$D^2 = P^{-1}A^2P.$$

Comme par hypothèse $A^2 = O$, nous trouvons

$$D^2 = P^{-1}A^2P = P^{-1}OP \implies D^2 = O.$$

Comme D est diagonale, la matrice D^2 est aussi diagonale et nous avons donc

$$d_{jj}^2 = 0 \quad \text{pour tout } j \in \{1, \dots, n\}.$$

Par conséquent,

$$d_{jj} = 0 \quad \text{pour tout } j \in \{1, \dots, n\},$$

ce qui implique que D est la matrice nulle :

$$D = O.$$

Ainsi,

$$A = PDP^{-1} = POP^{-1} \implies A = O.$$